عباس قلعه‌پور اقدم
دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی محض

شناخت عدد پی

به کمک چندضلعی‌های محیطی و محاطی

اشاره

این مقاله با خلاصه‌ای از تعریف و تاریخچهٔ عدد پی آغاز می‌شود، دانشمندانی را که در جهت شناخت این عدد تلاش کرده‌اند، معرفی می‌کند و راهکار ارشمیدس را که عبارت است از یافتن مقدار تقریبی برای این عدد، به‌وسیلهٔ چندضلعی‌های محیطی و محاطی بررسی می‌کند.

شناخت عدد پی

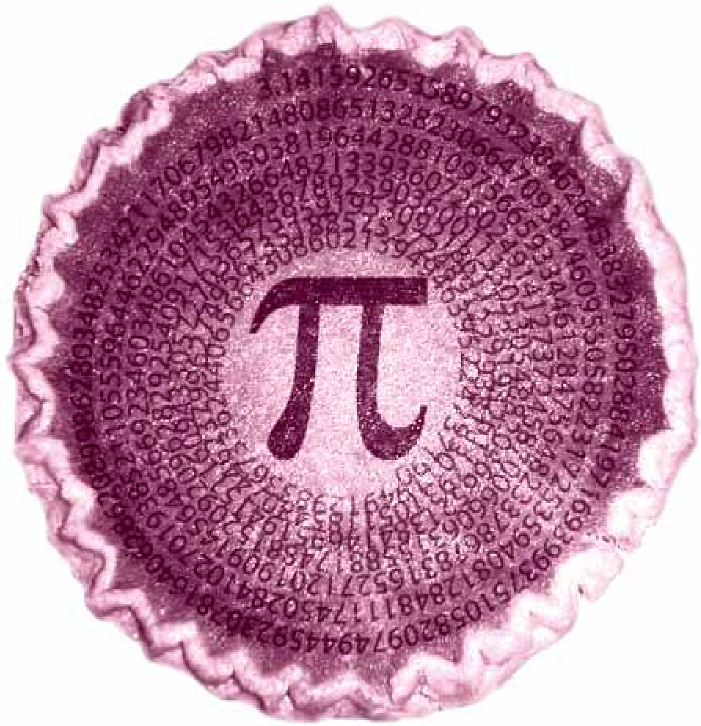
عدد «پی» عدد گنگی است که در بیشتر محاسبات ریاضی به نحوی حضور دارد و از مهم‌ترین اعداد در ریاضیات کاربردی در علومی مانند تئوری اعداد، آمار، ترمودینامیک، الکترومغناطیس و... محسوب می‌شود. آن را با «π» نمایش می‌دهند. در هندسهٔ اقلیدسی دوبعدی این عدد را نسبت محیط دایره به قطر آن و یا مساحت دایره‌ای به شعاع واحد تعریف می‌کنند.

به‌نظر می‌رسد اولین مردمانی که در پی شناخت این عدد بودند، این کار را به‌طور تجربی انجام می‌دادند. شاید یک تکه نخ نازک به دور دایره‌ای می‌کشیدند و طول آن را اندازه می‌گرفتند و سپس قطر را هم‌اندازه می‌گرفتند و در آخر نسبت آن‌ها را به‌دست می‌آوردند. این اولین گام است.

اندیشمندان بسیاری به دنبال یافتن یک مقدار تقریبی برای این عدد بوده‌اند و تلاش کرده‌اند که هرچه بیشتر به آن نزدیک شوند. بابلیان مقدار تقریبی π را برابر با ۳/۱۲۵ می‌دانستند. در «پاپیروس رایند» که مربوط به مصر باستان (۱۶۰۰ سال قبل از میلاد مسیح) است، مقدار $(\frac{16}{9})^2$ برای این عدد ثبت شده است که در نتیجه، مقدار تقریبی عدد پی ۳/۱۶۰۵ به‌دست می‌آید. در هند باستان در حدود ۸۰۰ سال قبل از میلاد **برهمگوتپه** تا $\sqrt{10}$ به π نزدیک شد.

اولین نظریه در مورد مقدار تقریبی عدد پی توسط **ارشمیدس** (از ۲۱۲ تا ۲۷۸ میلادی)، یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان همهٔ اعصار، از اهالی شهر یونانی «سیراکیوز» بیان شد. این نظریه برپایهٔ تقریب زدن محیط و مساحت شش‌ضلعی منتظم محیطی و شش‌ضلعی منتظم محاطی استوار بود که در ادامه چگونگی یافتن چنین تقریبی به‌طور کامل مطرح خواهد شد.

دومین تیزهوشی که در شناخت این موجود گنگ رکوردشکنی کرد، **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** (۷۹۰ تا ۸۳۲ هجری قمری)، ریاضی‌دان و ستاره‌شناس مشهور ایرانی بود. وی در کتاب «رسالهٔ محیطیه» به کمک



اولین نظریه در مورد مقدار تقریبی عدد پی توسط ارشمیدس بیان شد، اما دومین نفر در این زمینه غیاث‌الدین جمشید کاشانی بود که عدد پی را تا ۱۶ رقم اعشار محاسبه کرد و رکورد وی تا ۲۰۰ سال بی‌رقیب بود!

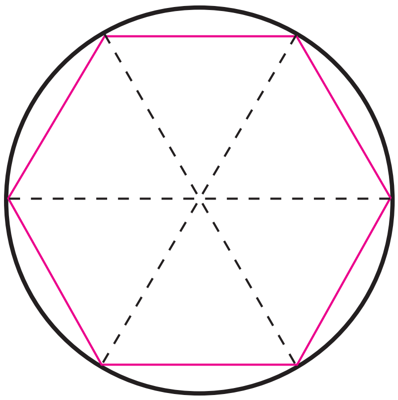
۸۰۵۳۰۶۳۶۸ ضلعی منتظم π را تا ۱۶ رقم اعشار محاسبه کرد! وی در این رکوردشکنی در حدود ۲۰۰ سال بی‌رقیب بود. کاشانی یکی از نوابغ و افتخارات کشور عزیزمان ایران است.

عدد پی در سال ۱۶۶۹ میلادی تا ۷۱ رقم اعشار، در سال ۱۸۴۴ میلادی تا ۲۰۰ رقم اعشار، و در سال ۱۸۷۳ تا ۷۰۰ رقم اعشار محاسبه شد. با رایانه توانسته‌اند تا ۱۰۰۰۰۰ رقم آن را محاسبه کنند. دانشمندان قدیم ایران ارقام اعشاری عدد پی را تا ۱۱ رقم اعشار به شعر سروده‌اند: «خرد و بینش و آگاهی دانشمندان ره سر منزل توفیق به ما آموزد.» به رابطهٔ بین این کلمات و مقدار تقریبی ۳/۱۴۱۵۹۲۲۴۵۳۵ برای عدد پی بیندیشید.

راهکار ارشمیدس

الف) چندضلعی محاطی

محیط دایره را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و یک nضلعی منتظم در داخل دایره رسم می‌کنیم؛ به‌طوری که همهٔ رأس‌های nضلعی روی دایره قرار داشته باشند. چنین nضلعی منتظمی را محاط در دایره[۱] نامند. محیط این nضلعی منتظم را I_n می‌نامیم. در شکل ۱ یک شش‌ضلعی منتظم محاطی دیده می‌شود.



شکل ۱

مسئلهٔ ۱. محاسبهٔ I_n: فرض کنیم AB ضلعی به طول a از یک nضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع R باشد. در این صورت اندازهٔ $A\hat{O}B$ (زاویهٔ مرکزی نظیر کمان AB) با اندازهٔ کمان AB برابر خواهد بود؛ یعنی:

$$A\hat{O}B = \frac{۲\pi}{n}$$

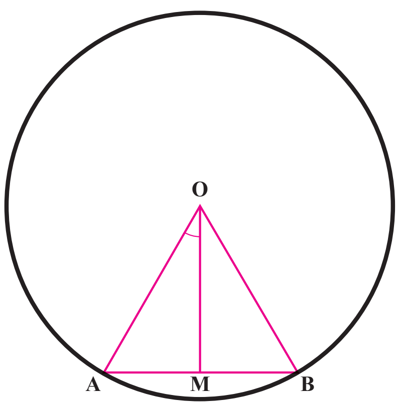
مثلث AOB متساوی‌الساقین است (زیرا: OA=OB=R). ارتفاع OM را رسم می‌کنیم. OM میانهٔ نظیر ضلع AB است. (چرا؟) از هم‌نهشتی مثلث‌های AOM و BOM درمی‌یابیم که OM نیم‌ساز زاویهٔ AOB نیز هست. در نتیجه:

$$A\hat{O}M = \frac{۱}{۲}A\hat{O}B = \frac{\pi}{n}, \quad AM = \frac{AB}{۲} = \frac{a}{۲}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOM داریم:

$$\sin A\hat{O}M = \frac{AM}{OA} = \frac{\frac{a}{۲}}{R} \Rightarrow a = ۲R\sin A\hat{O}M$$

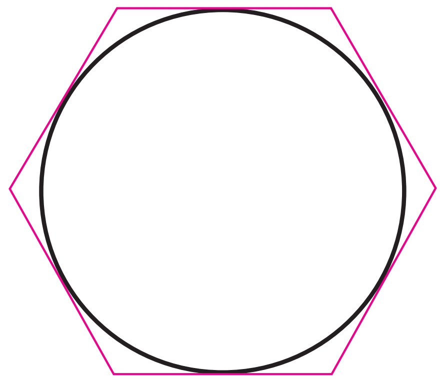
$$\Rightarrow I_n = ۲nR\sin\frac{\pi}{n}$$



شکل ۲

ب) چندضلعی محیطی

محیط دایره را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. از هر کدام از n نقطهٔ روی این دایره که به فاصلهٔ مساوی قرار دارند، مماسی رسم می‌کنیم. این مماس‌ها یک nضلعی منتظم پدید می‌آورند که آن را nضلعی منتظم محیطی[۲] می‌نامیم. محیط این nضلعی را C_n در نظر می‌گیریم. در شکل ۳ یک شش‌ضلعی منتظم محیطی دیده می‌شود.



شکل ۳

مسئلهٔ ۲. محاسبهٔ C_n: AB=a ضلعی از یک nضلعی منتظم محیط بر دایره‌ای به شعاع R است. می‌توان نوشت:

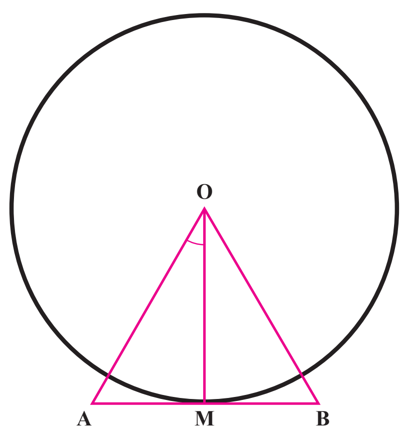
$$OM = R$$

$$AM = \frac{AB}{۲} = \frac{a}{۲}$$

$$\overset{\Delta}{AOM} : \tan A\hat{O}M = \frac{AM}{OM} = \frac{\frac{a}{۲}}{R}$$

$$\Rightarrow a = ۲R \tan\frac{\pi}{n}$$

$$\Rightarrow C_n = ۲nR \tan\frac{\pi}{n}$$



شکل ۴

ارشمیدس از این حقیقت استفاده کرد که:

$$I_n \leq \text{محیط دایره} \leq C_n$$

با افزایش دادن مقدار n می‌توان $C_n - I_n$ را کوچک و کوچک‌تر کرد. ارشمیدس براساس همین موضوع تا ۹۶ضلعی پیش‌رفت و پس از آنکه بازه‌ای برای محیط دایره یافت، با توجه به معلوم بودن شعاع و این حقیقت که π × قطر = محیط، توانست نتیجه بگیرد:

$$\frac{۲۲۳}{۷۱} < \pi < \frac{۲۲}{۷}$$ و یا تقریباً

$$۳/۱۴۰۸۳ < \pi < ۳/۱۴۲۸۵$$

● **مثال:** به کمک ۱۲ضلعی‌های منتظم بازه‌ای برای عدد π بیابید.

$$n = ۱۲ \Rightarrow \frac{\pi}{n} = \frac{۱۸۰}{۱۲} = ۱۵$$

$$I_n = ۲nR \sin\frac{\pi}{n} \Rightarrow I_{۱۲} = ۲ \times ۱۲ \times R \sin ۱۵^\circ$$

$$\Rightarrow I_{۱۲} \approx ۲۴R(۰/۲۵۸۸) \Rightarrow I_{۱۲} \approx ۶/۲۱۱۲R$$

$$C_n = ۲nR \tan\frac{\pi}{n} \Rightarrow C_{۱۲} = ۲ \times ۱۲ \times R \tan ۱۵$$

$$\Rightarrow C_{۱۲} \approx ۲۴R(۰/۰۲۶۷۹) \Rightarrow C_{۱۲} \approx ۶/۴۲۹۶R$$

$$I_{۱۲} \leq \text{محیط دایره} \leq C_{۱۲} \Rightarrow ۶/۲۱۱۲R < ۲\pi R < ۶/۴۲۹۶R$$

$$\Rightarrow ۳/۱۰۵۶ < \pi < ۳/۲۱۴۸$$

پی‌نوشت‌ها

1. Inscribed polygon
2. Circumscribed Polygon

منابع

۱. تابش، یحیی؛ حاجی‌بابایی، جواد؛ رستگار، آرش (بی‌تا). آموزش هنر حل مسئله. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.
۲. قراگوزلو، جلیل‌الله (۱۳۷۴). مثلثات پایه. انتشارات فاطمی. تهران. چاپ شانزدهم.
۳. ریاضیات ۱ سال اول دبیرستان، دفتر تألیف کتاب‌های درسی، چاپ هفتم، ۱۳۹۳.
4. Focus in High school mathematics: Reasoning and sense making: Algebra

پرسش‌های پیکارجو! ۴

در مثلث ABC، $\hat{A} = ۷۵^\circ$ و طول ارتفاع CH نصف طول ضلع AB است. زاویهٔ B چند درجه است؟

الف) ۴۵° ب) ۳۰° ج) ۶۰°

د) ۱۵° هـ) مقدار ثابتی نیست